16. (a)

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ t+4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} a - b - 2c &= 0 \\ 2a - b + c &= 0 \\ b + (t+4) \cdot c &= 0 \end{aligned}$$

$$\underset{II - 2 \cdot I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} a - b - 2c &= 0 \\ b + 5c &= 0 \\ b + (t+4) \cdot c &= 0 \end{aligned}$$

$$\underset{III - II}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} a - b - 2c &= 0 \\ b + 5c &= 0 \\ (t-1) \cdot c &= 0 \end{aligned}$$

Für $t \neq 1$ ist $c = 0$ und damit $a = b = 0$. Also sind für $t \neq 1$ die Vektoren linear unabhängig.

Für $t = 1$ ist die Lösungsmenge

$L = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b = -5c, \ a = -3c\}$, zum Beispiel ist $(a,b,c) = (-3, -5, 1) \neq 0$ ein Lösung. Also sind für $t = 1$ die Vektoren linear abhängig.

16. (b) $v_1 = (2,3,1,1)$, $v_2 = (4,3,1,2)$

Für die folgenden e_i, e_j sind v_1, v_2, e_i, e_j linear unabhängig:

$\underline{e_1, e_2}$ $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_1 + \delta e_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha + \beta = 0$

$\alpha + 2\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\Rightarrow \gamma = \delta = 0$

$\underline{e_1, e_3}$ $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_1 + \delta e_3 = 0$

$\Rightarrow 3\alpha + 3\beta = 0$

$\alpha + 2\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\Rightarrow \gamma = \delta = 0$

$\underline{e_2, e_4}$ $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_2 + \delta e_4 = 0$

$\Rightarrow 2\alpha + 4\beta = 0$

$\alpha + \beta = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\Rightarrow \gamma = \delta = 0$

$\underline{e_3, e_4}$: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_3 + \delta e_4 = 0$

$\Rightarrow 2\alpha + 4\beta = 0$

$3\alpha + 3\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$

$\Rightarrow \gamma = \delta = 0$.

Man muss jeweils die fehlenden kanonischen Basisvektoren aus v_1, v_2, e_i, e_j linear kombinieren (das lasse ich jetzt weg).

16. (b) Für die folgenden e_i, e_j sind v_1, v_2, e_i, e_j linear abhängig:

<u>e_2, e_3</u> $\quad \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_2 + \delta e_3 = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\alpha + 4\beta &= 0 \\ 3\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \delta &= 0 \\ \alpha + 2\beta &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 3\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta + \delta &= 0 \end{aligned}$$

$L = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha = -2\beta,\ \gamma = 3\beta,\ \delta = \beta\}$

Zum Beispiel ist $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (-2, 1, 3, 1) \neq 0$ eine Lösung des Systems.

<u>e_1, e_4</u> $\quad \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma e_1 + \delta e_4 = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\alpha + 4\beta + \gamma &= 0 \\ 3\alpha + 3\beta &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} 2\alpha + 4\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \alpha + 2\beta + \delta &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist $L = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4 : \beta = -\alpha,\ \gamma = 2\alpha,\ \delta = \alpha\}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1, -1, 2, 1) \neq 0$ ist eine Lösung des Systems.

17. (a) Für alle $x \geq x_0$ gilt $a_n x^n \geq a_n x^{n-1} \cdot x_0 \geq$

$\geq a_n x^{n-1} \cdot \frac{k}{a_n} \cdot (|a_0| + \dots + |a_{n-1}|) \geq$

$\geq k \cdot (|a_0| + |a_1| x + \dots + |a_{n-1}| x^{n-1}) \geq$

$\geq k \cdot |a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}|$ nach der Dreiecksungleichung.

Außerdem gilt für $x \geq x_0$ $a_n x^n \geq a_n x^{n-1} \cdot x_0 \geq a_n \cdot \frac{k}{a_n} = k$.

(b) Für alle $x \geq x_1$ gilt

$a_n x^n \geq a_n x^{n-1} \cdot x_1 \geq a_n x^{n-1} \cdot \frac{k}{a_n}(|a_0| + \dots + |a_{n-1}| + |b_0| + \dots + |b_{n-1}|) \geq$

$\geq k \cdot (|a_0| + \dots + |a_{n-1}| \cdot x^{n-1} + |b_0| + \dots + |b_{n-1}| \cdot x^{n-1}) \geq$

$\geq |a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}| + k \cdot |q(x)|$ nach der Dreiecksungleichung.

Also $p(x) \geq a_n x^n - |a_0 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}| \geq k \cdot |q(x)|$.

(c) Wir wählen $x_2 \in \mathbb{R}$ wie x_0 in (a) zu $p(x) - q(x)$ und $k+1$. Dann gelten

$\frac{1}{k+1}(a_n - b_n) x^n \geq |(a_0 - b_0) + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1}|$

und $(a_n - b_n) x^n \geq k+1$. für alle $x \geq x_2$.

Also ist $p(x) - q(x) \geq (a_n - b_n) x^n - |(a_0 - b_0) + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1}) x^{n-1}| \geq$

$\geq (a_n - b_n) x^n - \frac{1}{k+1}(a_n - b_n) x^n \geq k$ für alle $x \geq x_2$.

(d) Angenommen, $j \leq n$ ist maximal mit $a_j \neq b_j$, dann ist $j \geq 1$. Wir können jetzt (b) oder (c) auf $p - q$ oder auf $q - p$ anwenden. In beiden Fällen bekommen wir (aus (b) oder (c)) ein $x \in \mathbb{R}$ mit $p(x) \neq q(x)$.

18. (a) Wenn $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, $q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gelten:

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3$$

und $(\lambda \cdot p)(x) = \lambda \cdot p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_3)x^3$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also sind $p+q \in V$ und $\lambda \cdot p \in V$. Damit ist V ein Unterraum von M.

(b) $\mathcal{L}(1, x, x^2, x^3) = V$ ist klar.

Angenommen, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0 \in V$ in der Schreibweise für Vektorräume, das heißt $0 \in V$ steht für die konstante Funktion mit Wert 0. Dann ist

$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 = 0 \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Nach Aufgabe 17 (d) sind $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Also sind $1, x, x^2, x^3$ linear unabhängig. Damit ist $\{1, x, x^2, x^3\}$ eine Basis von V.

(c) $\mathcal{L}(1+x, (1+x)^2, x^2, (1+x)^3) = V$, da

$1 = 2 \cdot (1+x) - (1+x)^2 + x^2$, $x = (1+x)^2 - (1+x) - x^2$

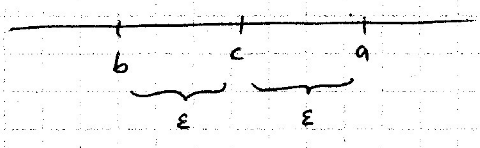
und $x^3 = (1+x)^3 - 2(1+x)^2 + (1+x) + x^2$.

Angenommen, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und $\alpha(1+x) + \beta(1+x)^2 + \gamma x^2 + \delta(1+x)^3 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Nach Aufgabe 17 (d) sind alle Koeffizienten dieses Polynoms $=0$, also sind

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta \quad\quad\;\; + \delta &= 0 \\
\alpha + 2\beta \quad\quad + 3\delta &= 0 \\
\beta + \gamma + 3\delta &= 0 \\
\delta &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Damit ist $\{(1+x), (1+x)^2, x^2, (1+x)^3\}$ eine Basis von V.

19. (a) Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$. Angenommen $b < a$ (wir führen das zum Widerspruch). Wir definieren $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$ und $c := b + \varepsilon$.



Wegen $a_n \longrightarrow a$ und $b_n \longrightarrow b$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a - a_n| < \varepsilon$ und $|b - b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$. Wir wählen ein $n \geq \max\{n_0, n_1\}$. Es gelten:

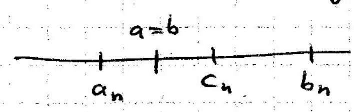
$\underline{a_n > c}$: wenn $a_n \leq c$, dann wäre $|a - a_n| = a - a_n =$
$= \varepsilon + (c - a_n) \geq \varepsilon$.

$\underline{b_n < c}$: wenn $b_n \geq c$, dann wäre $|b - b_n| = b_n - b =$
$= \varepsilon + (b - c) \geq \varepsilon$.

Also ist $b_n < a_n$ im Widerspruch zur Annahme. Also gilt $a \leq b$.

Aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt nicht $a < b$. Ein Gegenbeispiel dazu sind die Folgen (a_n), (b_n) mit $a_n = 0$ und $b_n = \frac{1}{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_0$.



Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_1$. Dann ist

$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| \leq |a_n - a| + |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon$ und

$|a - c_n| \leq |a - a_n| + |a_n - c_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$ für alle $n \geq \max\{n_0, n_1\}$.

20. (a) Für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es $m, n \geq n_0$ mit $x_m \leq -1$ und $x_n \geq 1$, also gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$: $|x - x_m| \geq 1$ oder $|x - x_n| \geq 1$. Also konvergiert (x_n) nicht.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} =$

$= 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, also ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 + 0 = 1$,

und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 1 \cdot 1 = 1$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 2$ nach (b).

Nach Aufgabe 4 (b) gilt $n^2 \leq 2^n$ für alle $n \geq 4$,

also gilt $0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 4$.

Wegen $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n \geq 4}} \frac{1}{n} = 0$ folgt aus Aufgabe 19 (b), dass

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 + 2 = 2$.

(d) $x_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i} = \dfrac{\frac{1}{3^{n+1}} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right)$ (endliche geometrische Reihe). Ähnlich wie in Satz 45 ($\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$) zeigt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$ (in den Übungen ausführlicher)

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{3}{2}$.

(e) $x_n = \frac{n^2 + 2n - 2}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - 3}{(n+1)^2} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1 - 3 \cdot \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right)^2 = 1 - 0 = 1$.

(f) $x_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1)}{(n+1)^3} = \left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) + \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\right)^2 = 0$.

($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ folgt auch aus Aufgabe 17 (b)).